

НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛИОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ
(25 книжекъ).

Подъ редакц. препод. Моск. гимн. **НИК. АМЕНИЦКАГО.**

Выпускъ II-й.

**Любопытныя ==
== путешествія.**

СЪ 22 РИСУНКАМИ.

Сост. Н. Аменицкий.

СОДЕРЖАНИЕ:

Игра «въ извозчики». — Кенигсбергскіе мосты. —
Путешествіе Гамильтона.

АРИМЕТИКА БЕЗЪ ВЫЧИСЛЕНІЙ:

О двухъ путникахъ. — Изъ Гавра въ Нью-Йоркъ. —
Выгодный способъ передвиженія. — Собака и два
пѣшехода.

Любопытныя путешествія черезъ рѣку.

Цѣна 20 коп.

МОСКВА. — 1912.

Складъ изданія у кн-цы А. С. Панафидиной.

Лялинъ пер., соб. домъ.

МОСКВА.

Типографія Русскаго Товарищества, Мыльниковъ пер., соб. домъ.

Телефонъ 18-35.

Отъ редактора.

Имѣя въ виду все болѣе и болѣе возрастающій интересъ къ *такой* учебно-математической литературѣ, которая затрагиваетъ живые и любопытные вопросы и вмѣстѣ съ тѣмъ возбуждаетъ любознательность, пытливость и самодѣятельность юныхъ читателей, — я полагаю, что предпринятое изданіе «*Научно-забавной библіотеки*» вполне своевременно и желательно.

Стараясь дать интересный подборъ игръ и занятій, составители стремились придать изложенію таковыхъ возможно большую простоту и живость, слѣдя въ то же время и за тѣмъ, чтобы высказываемыя попутно мысли были болѣе или менѣе обоснованы, а *возможность* того или иного вопроса была изслѣдована всесторонне.

Принимая все это во вниманіе, составители позволяютъ себѣ надѣяться, что «*Научно-забавная библіотека*», дѣйствительно, явится для учащейся молодежи средствомъ провести свой досугъ пріятно и съ пользой.

Ник. Аменицкий.

Въ непродолжительномъ времени выйдутъ въ свѣтъ, между прочимъ, слѣдующіе выпуски «Научно-забавной библіотеки»:

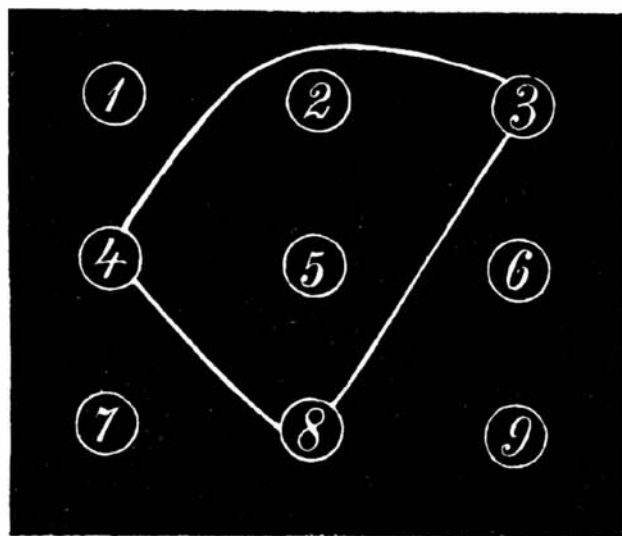
- Вып. 3. { Что можно сдѣлать изъ листа бумаги?
Фокусы съ узлами и веревками.
- « 4. Игра «Nim».
 - « 5. Эквилибристика (опыты, основанные на равновѣсіи тѣлъ).
 - « 6. Логика—помощница математики.
 - « 7. Домашняя механика и гидростатика.
 - « 8. Немного ученія о памяти.
 - « 9. Волшебные квадраты.
 - « 10. Ходъ коня.
 - « 11. Опыты со спичками.
 - « 12. Игра въ «15» (Taquin) и друг.
 - « 13. Математическія шутки.
 - « 14. Игра «въ отшельника».
 - « 15. Опыты съ апельсинными корками и друг.

Любопытныя путешествія.

Кому изъ васъ не знакома весьма незамысловатая игра «въ извозчики»?

Мы въ нѣсколькихъ словахъ напомнимъ читателямъ, въ чемъ она состоитъ.

Въ этой игрѣ участвуютъ двое: «сѣдокъ» и «извозчикъ». Первый приказываетъ «везти» себя въ тотъ или другой пунктъ, а второй исполняетъ эти приказанія. Самая «ѣзда» происходитъ на листѣ бумаги, на которомъ разставлены цифры, скажемъ отъ 1 до 9 (фиг. 1); извозчикъ обозначаетъ свой путь отъ одной цифры къ другой чертою.



Фиг. 1.

Главное условіе игры состоитъ въ томъ, чтобы эти пути не пересѣкались между собою; отсюда

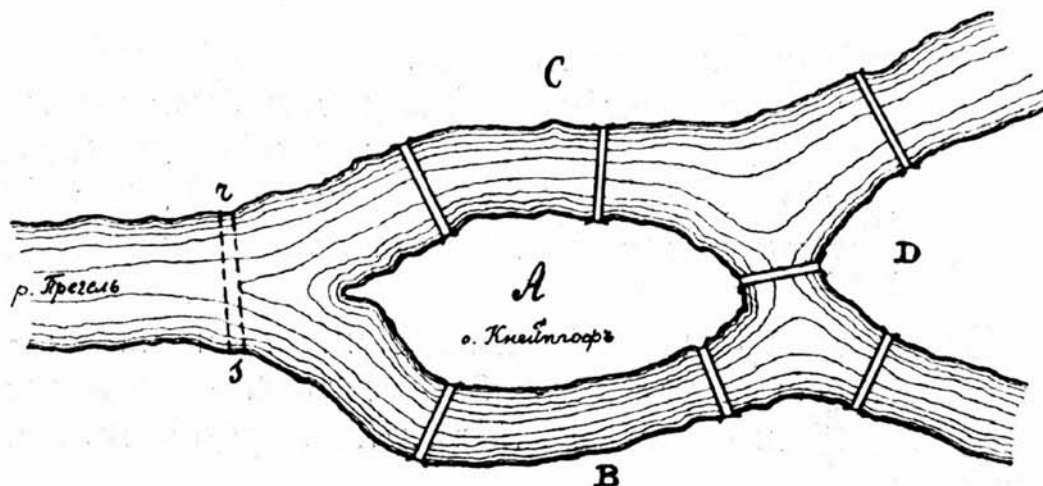
— 6 —

ясна и цѣль каждаго изъ играющихъ: «сѣдокъ» старается выбрать такой маршрутъ своего путешествія, чтобы «извозчику» пришлось нарушить это условіе; на примѣръ, на фиг. 1 мы видимъ, что «сѣдокъ» побывалъ въ пунктахъ 3, 4, 8 и снова въ 3-емъ, очевидно, если ему удастся изъ 3-го пункта отправиться, напр., въ 5-й, то тогда положеніе «извозчика» плохо: при дальнѣйшемъ путешествіи ему непремѣнно придется *пересѣчь* свой прежній путь, т.-е. проиграть игру. Если бы это случилось, то игра считается оконченной, и игроки мѣняются ролями.

Само собою разумѣется, что такая игра можетъ показаться увлекательной и интересной только для дѣтей въ возрастѣ, скажемъ, отъ 7 до 10 лѣтъ. Поэтому мы, предлагая читателямъ «*Любопытныя путешествія*», имѣемъ въ виду затронуть такіе вопросы, разрѣшеніе которыхъ не только интересно, но и поучительно.

1. Кенигсбергскіе мосты.

Рѣка Прегель (Германія) образуетъ близъ г. Кенигсберга островъ (*Кнейпгофъ*), который въ прежнее время соединялся съ прилегающими къ нему мѣстностями *семью* мостами. Фиг. 2 представляетъ собой схематическую карту, гдѣ о. Кнейпгофъ (А) сообщается мостами съ берегами (В, С и D) огибающей его рѣки.



Фиг. 2.

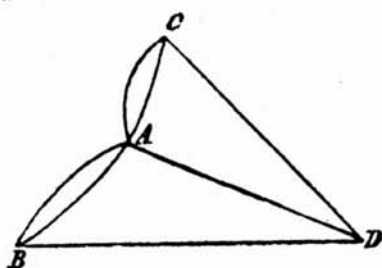
Въ тридцатыхъ годахъ XVIII столѣтія появился вопросъ, **возможно ли пройти послѣдовательно черезъ всѣ эти мосты, побывавши на каждомъ изъ нихъ только одинъ разъ.**

Этотъ вопросъ, извѣстный до сихъ поръ подъ названіемъ «*кенигсбергской задачи*», заинтересовалъ великаго математика *Леонарда Эйлера* и побудилъ его заняться изслѣдованіемъ *возможности* рѣшенія этой задачи.

— 8 —

Исслѣдованіе Эйлера*) доказываетъ намъ, что «кенигсбергская задача» — *неразрѣшима*.

Убѣдиться въ справедливости этого легко, если представить себѣ все то, что изображено на фиг. 2, въ упрощенномъ видѣ, какъ сдѣлали это мы на фиг. 3-й.



Фиг. 3.

Здѣсь островъ А и участки В, С и D изображены точками, а мосты, соединяющіе ихъ, — линіями.

Теперь наша задача можетъ быть выражена такъ:

*требуется послѣдовательно пройти по всѣмъ (7) линіямъ фиг. 3-й, побывавши на каждой изъ нихъ не болѣе **одного** раза, тогда какъ черезъ точки А, В, С и D разрѣшается проходить любое число разъ.*

Заранѣе обращаемъ вниманіе читателя на слѣдующее, весьма важное обстоятельство, которое теперь можно легко подмѣтить, рассматривая фиг. 3:

въ точкѣ А сходится 5 линій (т.-е. мостовъ);

» » В » 3 линіи;

» » С » 3 »

» » D » 3 »

Однимъ словомъ, въ каждой изъ четырехъ точекъ *сходится нечетное число линій*.

*) Оно помѣщено въ *Мемуарахъ Берлинской Академіи наукъ*.

Теперь вообразите себѣ, что мы съ вами рѣшили **начать** путешествіе **изъ точки А** и отправились по одному изъ мостовъ, хотя бы въ С; тогда *непройденными* останутся еще *4 моста*, сходящіеся въ А. Вполнѣ понятно, что въ послѣдствіи мы можемъ воспользоваться удобнымъ случаемъ для того, чтобы по *одному* изъ этихъ мостовъ вернуться въ А, а по *другому* отправиться снова въ дальнѣйшее путешествіе.

Тогда использованными окажутся уже 3 моста.

По одному изъ двухъ остальныхъ мостовъ мы *снова* возвратимся въ точку А, а по другому отправимся заканчивать наше путешествіе.

Такимъ образомъ, мы убѣдились, что, если *точка А* будетъ принята за *станцію отправления*, то нечетное число мостовъ, сходящихся въ ней, вовсе *не* служитъ препятствіемъ къ соблюденію требуемыхъ условій нашей задачи.

То же самое можно сказать и по поводу всякой другой точки на фиг. 3, при томъ условіи, если изъ нея мы *начали* свое путешествіе.

Теперь посмотримъ, какая изъ точекъ пригодна для того, чтобы ею закончить наши странствованія.

Возьмемъ хотя бы точку В, въ которой сходятся три моста.

Возможно, что во время путешествія намъ пришлось побывать (т.-е. *приѣхать* и *уѣхать*) въ точку В; благодаря этому нами были бы пройдены только два (изъ трехъ) моста. Остающійся третій мостъ пригоденъ лишь для того, чтобы *возвратиться* черезъ него въ В, но *уѣхать* вторично изъ этой точки намъ съ вами не пришлось бы,

— 10 —

такъ какъ всѣ мосты (3), сходящіеся въ В, были бы уже использованы.

Такъ какъ все то, что сказано относительно точки В, мы имѣемъ право сказать и по отношенію къ точкамъ С и D (каждая съ тремя мостами), — то ясно слѣдующее:

если А служитъ началомъ, то конечнымъ пунктомъ можетъ служить или В, или С, или D.

А принимая во вниманіе, что, какъ начальныхъ, такъ и конечныхъ точекъ не можетъ быть болѣе одной, приходится сдѣлать именно тотъ **выводъ**, къ которому пришелъ въ своемъ разсужденіи Леонардъ Эйлеръ, а именно:

*для того, чтобы путешествіе было выполнено согласно всѣмъ поставленнымъ условіямъ задачи, необходимо, чтобы точекъ съ **нечетнымъ** числомъ мостовъ было не болѣе **двухъ**.*

Если это необходимое требованіе соблюдено, то, повторяемъ, одну изъ такихъ точекъ мы можемъ принять за станцію отправленія; тогда другая *непременно* должна послужить намъ конечнымъ пунктомъ путешествія.

Принимая во вниманіе выводъ, сдѣланный Эйлеромъ, нетрудно видоизмѣнить «кенигсбергскую задачу» такъ, чтобы она стала *разрѣшима*.

Для этого стоить только къ вышеупомянутымъ 7 мостамъ добавить еще одинъ, который соединялъ бы участки В и С.

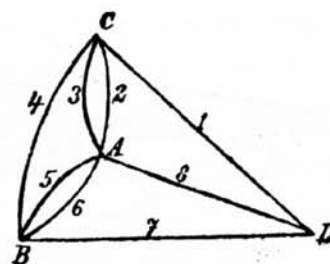
Замѣтимъ, кстати, что такой мостъ (желѣзнодорожный) въ дѣйствительности существуетъ, а потому, измѣняя условіе задачи, мы дѣлаемъ ее

— 11 —

только болѣе правдоподобной (см. фиг. 2, мостъ обозначенъ rs).

Теперь взаимное расположеніе участковъ А, В, С и D и *восьми* мостовъ, ихъ соединяющихъ, схематически изобразится такъ, какъ показано на фиг. 4.

Изъ чертежа видно, что только въ *двухъ* точкахъ (А и D) сходится *нечетное* число линій, а именно:



Фиг. 4.

въ точкѣ А	сходится	5	линій;
» » В	»	4	линіи;
» » С	»	4	»
» » D	»	3	»

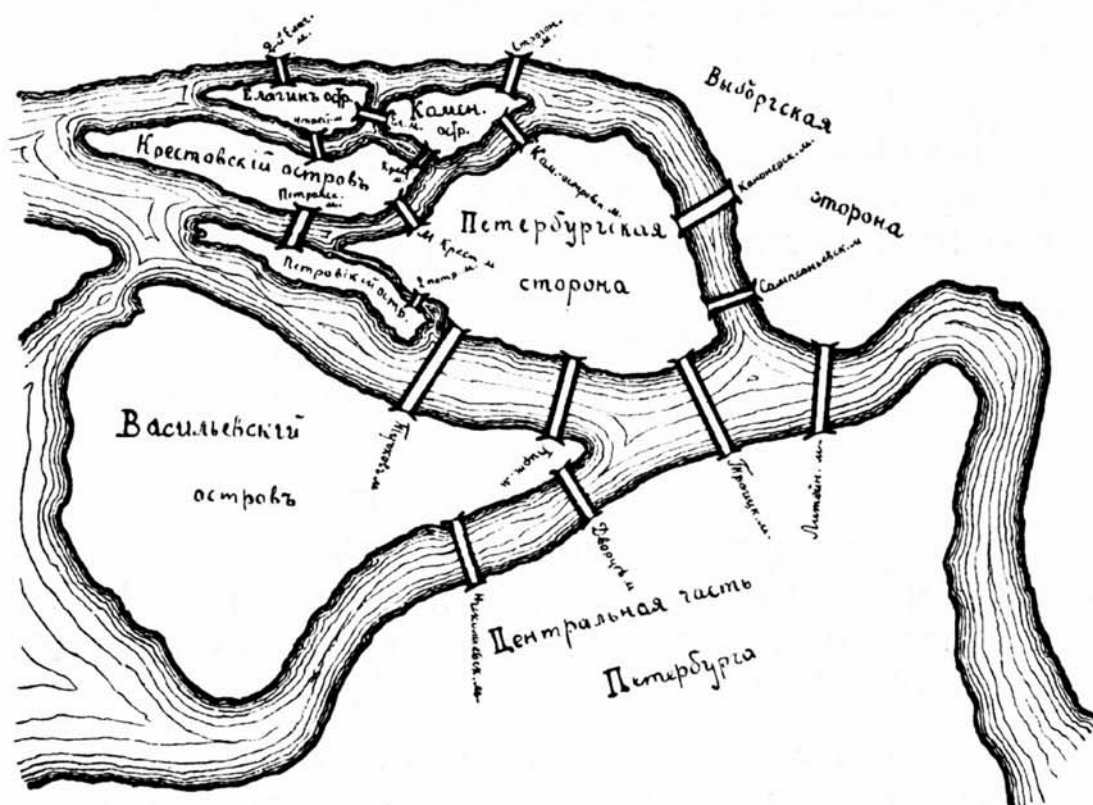
Слѣдовательно, теперь мы имѣемъ право думать, что, отправившись, напримѣръ, изъ D, мы благополучно закончимъ требуемое путешествіе въ точкѣ А (или наоборотъ!).

Дѣйствительно, если мы начнемъ свое путешествіе изъ пункта D и затѣмъ отправимся (согласно разставленнымъ на фиг. 4 цифрамъ) въ С, потомъ въ А, отсюда снова въ С, затѣмъ въ В и т. д., то путешествіе окажется *выполнимымъ*, при чемъ всѣ поставленныя условія будутъ соблюдены.

Для лучшаго усвоенія «кенигсбергской задачи» мы предлагаемъ нашимъ читателямъ ознакомиться съ помѣщенной ниже картой, которая изображаетъ планъ части Петербурга; на этой картѣ нанесены мосты, соединяющіе между собою Центральную часть города (съ 4-мя мостами), острова: Васильевскій (съ 4-мя мостами), Крестовскій (съ 4-мя мо-

— 12 —

стами), Елагинъ (съ 3-мя мостами), Каменный (съ 4-мя мостами) и Петровский (съ 2-мя мостами), Петербургскую сторону (съ 8-ю мостами) и Выборгскую сторону (съ 5-ю мостами).



Фиг. 5.

При разсмотрѣннн этой карты оказывается, что въ этомъ случаѣ только *два* мѣстности имѣютъ по нечетному количеству мостовъ, а именно — *Елагинъ островъ*, соединенный тремя мостами: съ Выборгской стороной, Каменнымъ и Крестовскимъ островами и *Выборгская сторона*, соединенная пятью мостами: съ Елагинымъ и Каменнымъ сторонами (по одному мосту), съ Петербургской стороной (два моста) и съ Центральной частью города (одинъ мостъ).

Такъ какъ разсматриваемая задача разрѣшима въ томъ случаѣ, когда мѣстностей съ нечетнымъ числомъ мостовъ не болѣе двухъ, и когда обходъ начинается съ одной изъ нихъ, а заканчивается въ другой,—то отсюда слѣдуетъ, что переходъ черезъ всѣ мосты г. Петербурга, при условіи проходить по каждому изъ нихъ не болѣе одного раза, *возможенъ*; для этого стоить только начать это путешествіе или съ Выборгской стороны, или съ Елагина острова, при чемъ, если мы начнемъ обходъ съ первой мѣстности, то закончимъ его всегда во второй, и наоборотъ *).

Чтобы покончить съ вопросомъ, который возникъ при рѣшеніи «кенигсбергской задачи», мы предлагаемъ здѣсь читателямъ нѣсколько частныхъ случаевъ этого вопроса, носящихъ такой же характеръ, какъ и вышеупомянутая задача.

Чтобы внести въ наши занятія нѣсколько разнообразія, мы, при дальнѣйшемъ изложеніи, вмѣсто того, чтобы «объѣзжать» мосты, поставимъ себѣ такое условіе: *начертить съ одного почерка* (т.-е. не отрывая карандаша отъ бумаги) *каждую изъ помѣщаемыхъ ниже фигуръ*.

Само собою понятно, что это условіе есть только видоизмѣненное требованіе, которое было предъявлено въ «кенигсбергской задачѣ».

Поэтому по поводу уже разсмотрѣнныхъ нами фигуръ 3-й и 4-й теперь можно бы было сказать, что первую изъ нихъ начертить съ одного по-

*) Мы даемъ здѣсь примѣрный маршрутъ: **Выборгская сторона**—Литейн. м.—Троицк. м.—Биржевой м.—Дворцовый м.—Николаевскій м.—Тучковъ м.—2-й Петровскій м.—Петровскій м.—М. Крестовскій м.—Сампсоньевскій м.—Канонерскій м.—Каменноостровскій м.—Крестовскій м.—Н.-Крестовскій м.—Елагинскій м.—Строгановскій м.—2-й Елагинскій м.—**Елагинъ островъ**.

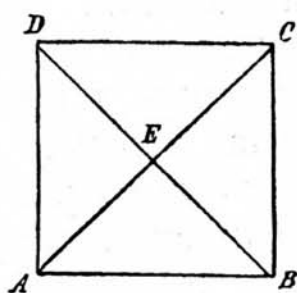
черка невозможно, тогда какъ это вовсе не относится ко второй изъ нихъ; дѣйствительно, имѣя въ виду цифры, разставленныя на фиг. 4, вы легко можете начертить ее требуемымъ почеркомъ, если будете придерживаться маршрута:

D C A C B A B D A
или **A D B A B C A C D**

Предлагаемъ читателямъ самимъ выработать другіе маршруты, но съ тѣми же начальнымъ и конечнымъ пунктами (А и D).

Что же касается фигуръ 6-й 7-й и 8-й, то, разсматривая ихъ, нетрудно убѣдиться въ слѣдующемъ:

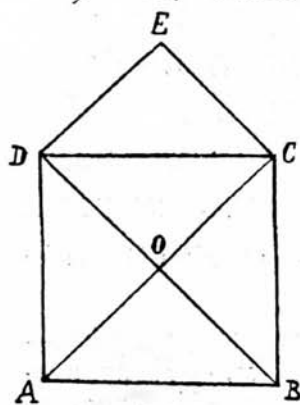
а) на фиг. 6 имѣется *4 точки* (А, В, С и D)



Фиг. 6.

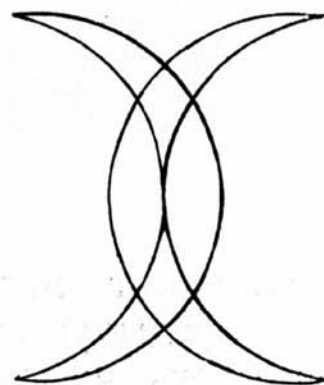
съ *нечетнымъ* числомъ сходящихся въ нихъ линій и только *одна* точка (Е) съ *четнымъ* числомъ такихъ линій. Руководствуясь тѣмъ правиломъ, которое установилъ Эйлеръ для „кенигсбергской задачи“ (см. стр. 10), мы имѣемъ право сказать, что *фиг. 6 не можетъ быть начерчена съ одного почерка*.

б) Но, если къ этой фигурѣ добавить сверху ломаную линію DEC (фиг. 7), то окажется: 1) что въ точкахъ D, С и О сходятся 4 линіи, и въ точкѣ Е—2 линіи и 2) въ точкахъ А и В сходятся 3 линіи; другими словами, на *фиг. 7-й* имѣется только двѣ точки (А и В) съ нечетнымъ числомъ линій, а потому *она можетъ быть начерчена съ одного почерка* (если начало—А, то конецъ—В, или наоборотъ).



Фиг. 7.

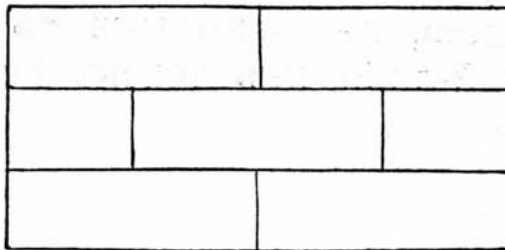
с) Фигура 8-ая, по словамъ одного изъ мусульманскихъ преданій, представляетъ собою подпись Магомета (въ видѣ двухъ скрещенныхъ полумѣсяцевъ), которую онъ чертилъ съ *одного* почерка остриемъ своего меча. Ручаться за достовѣрность этой легенды, конечно, трудно, но легко убѣдиться въ томъ, что *фиг. 8-ая, дѣйствительно, можетъ быть начерчена однимъ почеркомъ: всѣ точки* этой фигуры имѣютъ *четное* число сходящихся въ нихъ линій, слѣдовательно любая изъ этихъ точекъ можетъ быть принята за начало (она же окажется и конечнымъ пунктомъ).



Фиг. 8.

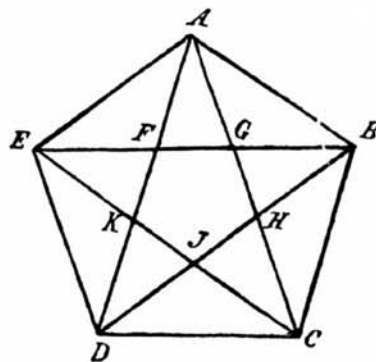
Разсуждая такимъ же образомъ, мы найдемъ, что:

д) Фигура 9-ая, изображающая, какъ бы, часть кирпичной стѣны, *не можетъ* быть начерчена однимъ почеркомъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ мы имѣемъ болѣе 2 точекъ (а именно 11) съ нечетнымъ числомъ линій.



Фиг. 9.

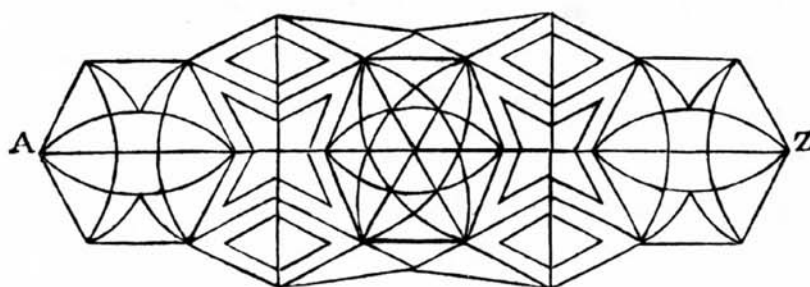
е) Фигура 10, *всѣ* точки которой имѣютъ по 4 сходящихся въ нихъ линіи, подобно подписи Магомета (см. фиг. 8), *можетъ* быть начерчена требуемымъ образомъ (начало—любая точка). Маршрутъ, напр., такой: ABCDACEBDEA.



Фиг. 10.

— 16 —

f) Наконецъ, *фигура 11-я*, представляющая собою весьма сложную систему линий и имѣющая только двѣ точки (А и Z) съ нечетнымъ числомъ сходящихся въ нихъ линий, *можетъ быть вычерчена однимъ почеркомъ.*



Фиг. 11.

Выполнить эту задачу, конечно, не такъ легко, какъ предыдущія, но мы во всякомъ случаѣ посоветуемъ читателю, который вздумалъ бы это сдѣлать: 1) помнить (или отмѣчать какимъ-ниб. значкомъ) тѣ линии, которыя уже разъ пройдены и 2) почаще, такъ сказать, «заглядывать въ будущее», т.-е. считаться съ тѣмъ, чтобы путь къ какой-либо изъ точекъ не оказался вовсе отрѣзаннымъ.

2. Путешествіе Гамильтона.

(Круговая поѣздка по университетскимъ городамъ Германіи).

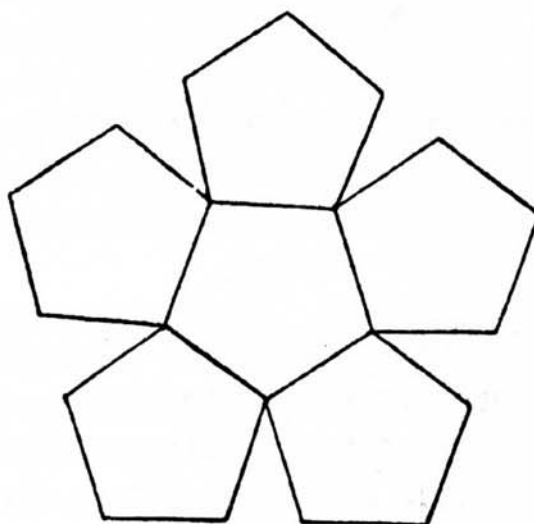
Эта игра въ историческомъ отношеніи замѣчательна тѣмъ, что она принадлежитъ знаменитому англійскому математику *Гамильтону*, который, однако, придавалъ ей нѣсколько другую форму, чѣмъ та, которая здѣсь будетъ описана. Гамильтонъ предложилъ *совершить такое путешествіе, чтобы побывать по одному разу на всѣхъ вершинахъ тѣла, которое въ геометріи извѣстно подъ названіемъ додекаэдра* (двѣнадцатигранника). Это тѣло, имѣющее 20 вершинъ и 30 реберъ, ограничено 12-ью правильными пятиугольниками.

Чтобы получить вполне ясное представленіе объ этомъ многогранникѣ, мы рекомендовали бы читателю самому склеить его изъ толстой бумаги.

А сдѣлать это нетрудно. Начертите на листѣ бумаги *два* такихъ фигуры, какія изображены на рис. 12, и аккуратно вырѣжьте ихъ по контуру, оставивши узенькую полоску (для склеиванія). Изъ каждой такой фигуры легко сдѣлать

— 18 —

нѣчто вродѣ коробочки, у которой дномъ будетъ служить внутренній 5—угольникъ, въ то время какъ остальные 5 пятиугольниковъ, будучи отогнуты и склеены другъ съ другомъ, будутъ служить боковыми стѣнками.



Фиг. 12.

Если такую коробочку вы прикроете сверху другою точно такою же коробочкой, то и получите тѣло, называемое додекаэдромъ.

Итакъ, съ *идеей* задачи Гамильтона читатели уже познакомились.

Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть вопросъ, обратный тому, который былъ затронутъ при рѣшеніи «кенигсбергской задачи».

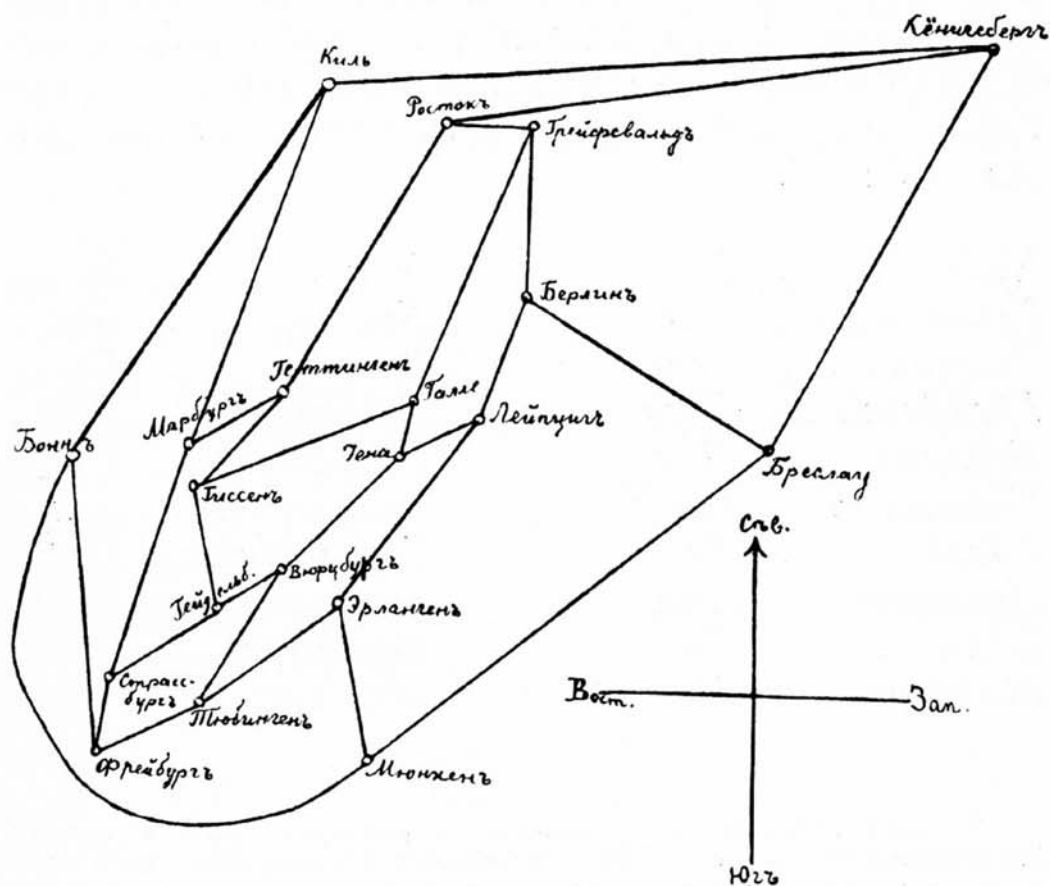
Дѣло въ томъ, что *ранѣе* мы съ вами путешествовали по различнымъ системамъ линій, при чемъ по каждой изъ нихъ (линій) дозволялось проходить не болѣе одного раза, а точки пересѣченій этихъ линій можно было посѣщать сколько угодно разъ. *Теперь* же мы займемся задачей, при рѣше-

— 19 —

ни которой должно быть соблюдено условіе, которое было поставленно Гамильтономъ, и которое можетъ быть выражено такъ:

Каждая изъ точекъ должна быть пройдена только одинъ разъ, тогда какъ по одной и той же линіи можно ѣздить любое число разъ.

Мы придадимъ нашей задачѣ слѣдующую форму: *одинъ провинціальный студентъ, не будучи въ состояніи остановить свой выборъ на какомъ-нибудь одномъ университетѣ, захотѣлъ предпринять путешествіе, съ цѣлью ознакомле-*



Фиг. 13.

нія съ университетскими городами Германіи, и потомъ уже выбрать одинъ изъ нихъ. Для та-

2*

кого путешествія онъ воспользовался картой (которая приложена здѣсь въ схематическомъ видѣ, см. фиг. 13) и пользуясь ею, онъ объѣхалъ всѣ города, побывавши въ каждомъ изъ нихъ только **одинъ** разъ; при этомъ онъ возвратился въ конецъ концовъ въ тотъ городъ, откуда было начато путешествіе (т.-е. поѣздка студента была, какъ говорятъ, «круговая»).

Условимся въ томъ, что при дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ для краткости обозначать каждый изъ двадцати *) университетскихъ городовъ Германіи нѣсколькими согласными буквами, входящихъ въ его названіе; во избѣжаніе недоразумѣній мы приводимъ всѣ эти сокращенія, которыя будутъ все время встрѣчаться въ нашемъ разсказѣ:

Киль Кл
Кенигсбергъ . Кнсб
Ростокъ . . Рст
Грейфсвальдъ. Грсв
Берлинъ . . Брл
Геттингенъ. . Гтнг
Галле Гл
Лейпцигъ. . . Лпц
Боннъ Бн
Марбургъ. . . Мрб

Иена Ин
Бреслау. . . . Брс
Гиссенъ Гс
Вюрцбургъ. . Врц
Гейдельбергъ. Гдлб
Эрлангенъ. . Эрл
Страсбургъ. . Стр
Тюбингенъ. . Тбнг
Фрейбургъ. . Фрб
Мюнхенъ . . Мнх

*) Самый молодой изъ германскихъ университетовъ, а именно **мюнстерскій** еще до сихъ поръ не вполне сформированъ, такъ какъ не имѣетъ своего собственнаго медицинскаго факультета; въ виду этого, а главное, по причинамъ, которыя будутъ ясны для читателя при дальнѣйшемъ чтеніи, этой книги, мы при редактированіи этой задачи сочли лучшимъ не упоминать о г. Мюнстерѣ, какъ объ университетскомъ городѣ.

— 21 —

Наша карта (фиг. 13) устроена такимъ образомъ, что въ каждомъ изъ 20 городовъ сходятся 3 дороги; напримѣръ, въ Берлинъ ведутъ дороги: одна изъ Бреслау, другая изъ Лейпцига и третья изъ Грейфсвальда.

Для того, чтобы совершить полное круговое путешествіе черезъ всѣ 20 городовъ, потребуется *только* тѣ *два* изъ вышеупомянутыхъ трехъ дорогъ, изъ которыхъ одна служитъ для прибытія, а другая для отбытія; такимъ образомъ, очевидно, что изъ трехъ путей сообщенія съ каждой станціей *одинъ всегда останется неиспользованнымъ*. Поэтому изъ всѣхъ 30 дорогъ, имѣющихся на нашемъ планѣ, 10 должны быть оставлены безъ вниманія, но при томъ такъ, чтобы каждая изъ 20 станцій лишилась одного изъ своихъ путей сообщеній.

Вслѣдствіе всего сказаннаго, наша задача сильно упрощается, и та сѣтъ путей сообщенія, которая останется на картѣ послѣ удаленія 10 ненужныхъ дорогъ, и будетъ представлять собою картину полного кругового путешествія; исходнымъ, равно какъ и конечнымъ пунктомъ этого путешествія можетъ служить любой изъ названныхъ 20 городовъ.

Предположимъ, что мы рѣшили упразднить слѣдующія 10 дорогъ:

отъ	Брл	до	Грсв
»	Рст	»	Кнсб
»	Кл	»	Мрб
»	Брс	»	Мнх
»	Эрл	»	Лпц
»	Гс	»	Гтнг

— 22 —

отъ Бн до Фрб
 » Гл » Ин
 » Стр » Гдлб
 » Тбнг » Врц

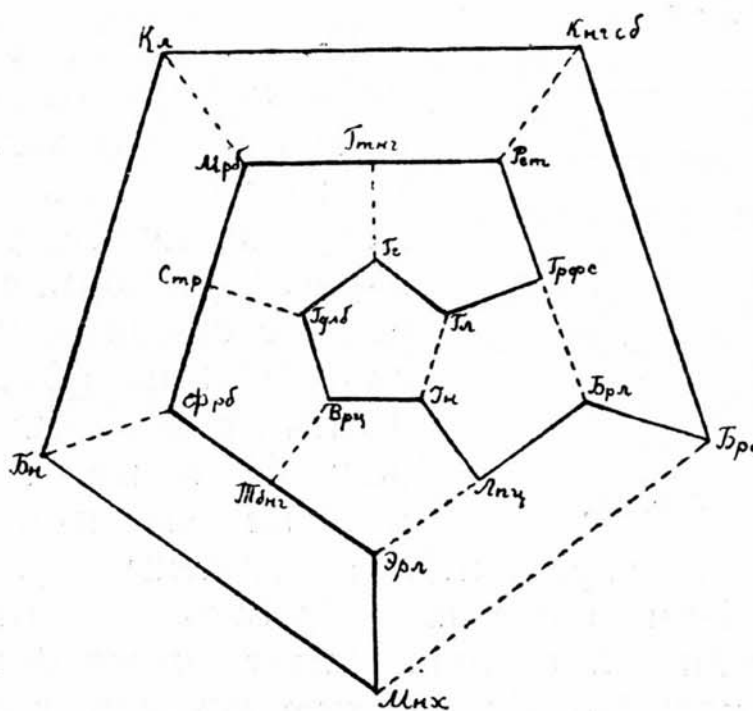
Благодаря этому, какъ уже сказано выше, каждый изъ 20 пунктовъ лишится одного (изъ трехъ) способа сообщенія съ другими городами, и теперь, если мы начнемъ свое путешествіе, хотя бы изъ Берлина, то получится слѣдующій маршрутъ полной круговой поѣздки при соблюденіи всѣхъ условій нашей задачи:

**Брл—Брс—Кнсб—Кл—Бн—Мнх—Эрл—
 Тбнг—Фрб—Стр—Мрб—Гтнг—Рст—
 Грсв—Гл—Гдлб—Врц—Ин—Лпц—Брл.**

Само собою разумѣется, что та же поѣздка и съ тѣмъ же успѣхомъ можетъ быть выполнена и въ *обратномъ* направленіи.

Такъ какъ для нашего разсужденія о способахъ сообщенія между городами точное географическое мѣстоположеніе этихъ 20 городовъ, очевидно, значенія не имѣетъ, то мы воспользуемся болѣе простымъ чертежомъ, который будетъ гораздо удобнѣе для этой цѣли, чѣмъ карта, изображенная на фиг. 13. Это сдѣлать вовсе не трудно, если мы обратимъ вниманіе на слѣдующее: 1) въ серединѣ фиг. 13, 5 городовъ (Гс—Гл—Ин—Врц—Гдлб) образуютъ неправильный 5-угольникъ; 2) къ каждой изъ сторонъ этого 5-угольника примыкаетъ новый 5-угольникъ, на примѣръ, къ сторонѣ Гл—Ин прилегаетъ 5-угольникъ Гл—Ин—Лпц—Брл—Грсв; то же самое

можно сказать и относительно каждой изъ остальныхъ 4-хъ сторонъ. Если мы представимъ все это схематически, то въ результатъ получимъ чертежъ, изображенный на фиг. 14, при чемъ читатель, конечно, видитъ, что здѣсь способъ соединенія нашихъ 20 станцій остается совершенно такимъ же, какъ и на фиг. 13.

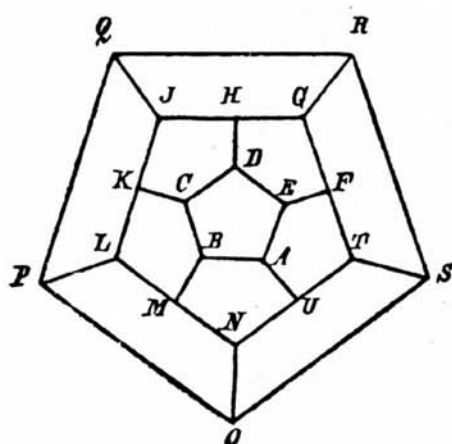


Фиг. 14.

Замѣнивши карту университетскихъ городовъ геометрическимъ чертежемъ, на которомъ, однако, обозначенія отдѣльныхъ точекъ все еще напоминаютъ географическія названія, мы, конечно, сильно погрѣшили противъ правды, но только, повторяемъ, въ смыслѣ географической правильности.

Если же, несмотря на это признаніе, чертежъ 14 не удовлетворитъ черезчуръ требовательнаго

читателя, то мы совѣтуемъ ему отрѣшиться вовсе отъ интересующей насъ темы («круговая поѣздка по университетскимъ городамъ Германіи») и, обратившись къ фиг. 15, заняться разрѣшеніемъ вопроса уже чисто геометрическаго характера: *возможно ли объѣхать фигуру 15 такъ, чтобы побывать въ каждой изъ ея точекъ *) по одному разу?*



Фиг. 15.

Мы же со своей стороны, имѣя въ виду одно очень важное обстоятельство, хотѣли бы обратить вниманіе на ту разницу между фиг. 14 и фиг. 15, которая ясна изъ непосредственного ихъ разсмотрѣнія: на фиг. 14 тѣ десять путей сообщенія между нѣкоторыми городами, которые мы нашли возможнымъ упразднить, обозначены пунктирными линіями, и невольно бросается въ глаза то, что среди этихъ линій *нельзя найти двухъ такихъ, которыя бы пересѣкались между собою.*

Для того, чтобы «любопытное» путешествіе Гамильтона стало вполне ясно для читателя, необходимо теперь высказать *нѣсколько* болѣе общихъ соображеній по поводу рѣшенія нашей задачи.

*) На фиг. 15 точки названы (какъ это принято въ геометріи) буквами латинскаго алфавита, такъ что теперь ничто уже не можетъ напоминать читателю о географическихъ названіяхъ городовъ.

Разсматривая схематическое изображение «круговой» поѣздки, изображенное на фиг. 15, мы можемъ легко убѣдиться въ строгой законмѣрности нашего чертежа.

Дѣйствительно: къ каждой изъ имѣющихся на этомъ чертежѣ 30 внутреннихъ линій примыкаютъ два пятиугольника*); въ каждой изъ 20 точекъ сходятся три линіи, поэтому всѣ точки на нашемъ чертежѣ, какъ наружныя, такъ и внутреннія, совершенно, такъ сказать, *равноцѣнны*, т.-е. обладаютъ одинаковыми свойствами. Если бы мы начали свое путешествіе изъ точки А и послѣдовательно прошли бы черезъ всѣ точки, то само собою разумѣется, что это путешествіе мы выполнили бы такъ же удачно и въ томъ случаѣ, если бы начали его, напримѣръ, отъ точки G или отъ точки S. *Въ этомъ и состоитъ непосредственный выводъ изъ вполне законмѣрнаго строенія данной системы линій.*

Дать общій «рецептъ» для того, чтобы пройти черезъ всѣ 20 точекъ, нетрудно: если мы начнемъ, напримѣръ, отъ Брс (см. фиг. 14) и отправимся прежде всего въ Кнсб, то тамъ передъ нами окажется двѣ дороги: одна — направо, въ Кл, а другая — налѣво, въ Рст.

Если мы условимся обозначать перемѣну направленія нашего пути *направо* буквой *n*, а пе-

*) Читатель не долженъ смущаться тѣмъ, что линіи OP, PQ, QR и т. д., повидимому, *прямые*; если бы мы были въ состояніи изобразить на плоскости бумаги хотя бы линію LN, *сломанную* въ точкѣ M, то тогда бы не могло быть никакихъ сомнѣній относительно того, что фигура PLMNO — *пятиугольникъ*, а не четырехугольникъ (какъ это кажется при первомъ взглядѣ на чертежъ).

ремѣну направленія *вливо*—буквой *л*, то для того, чтобы обойти всѣ пункты нашей сѣти городовъ, мы должны соблюдать слѣдующій порядокъ въ перемѣнѣ направленій.

nnnnllllnlnlennnnllllnl

Такимъ образомъ, въ нашемъ примѣрѣ мы изъ Кнсб свернемъ направо въ Кл, затѣмъ снова направо въ Бн, отсюда еще направо въ Мнх, а теперь налево въ Эрл, затѣмъ снова налево въ Тбнг и еще разъ налево въ Фрб; послѣ этого свернемъ сначала направо въ Стрсб, а потомъ налево въ Мрб и т. д., согласно данному выше ряду буквъ.

Сравнивая только что совершенное путешествіе съ тѣмъ, которое описано ранѣе, мы увидимъ, что разница между ними только въ томъ, что Брс тамъ служить 2-й станціей, а здѣсь—первою; но это, вѣдь, совершенно не имѣетъ значенія, такъ какъ обѣ поѣздки можно назвать «круговыми».

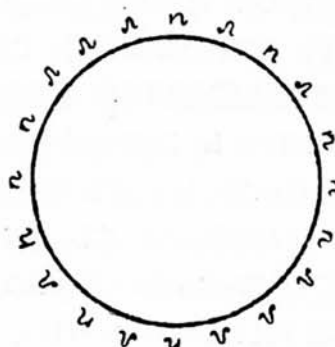
Замѣтимъ, между прочимъ, что при послѣднемъ путешествіи намъ, дѣйствительно, не приходилось слѣдовать по тѣмъ десяти пунктирнымъ линіямъ, которыя имѣются на фиг. 14.

Итакъ, мы получили вполне законченный («круговой») маршрут поѣздки, благодаря которому удастся посѣтить *всѣ* 20 городовъ и при томъ каждый *не болѣе одного раза*.

Такъ какъ этотъ маршрутъ одинаково пригоденъ и въ обратномъ направленіи, и такъ какъ начинать путешествіе можно съ любого изъ 20 пунктовъ, то нашу «круговую» поѣздку въ

высшей степени удобно изобразить *наглядно* въ видѣ *окружности* (фиг. 16).

Пользуясь этимъ чертежомъ, мы будемъ имѣть возможность получать всегда правильное рѣшеніе вопроса, съ какой бы точки не начали свое путешествіе.



Фиг. 16.

Поэтому вышеприведенный «рецептъ» для выполнения требуемаго путешествія можно предложить, напримѣръ, и въ такомъ видѣ:

Л П Л П Л П П П Л Л Л Л П Л П Л П П П Л Л

Слѣдуя этому рецепту и отправляясь изъ Брс въ Кнсб, мы получимъ новый круговой маршрутъ поѣздки, а именно:

**Брс—Кнсб—Рст—Гтнг—Гс—Гдлб—Врц—
Тбнг—Фрб—Стр—Мрб—Кл—Бн—Мнх—
Эрл—Лпц—Ин—Гл—Грsv—Брл—Брс.**

Ясно, что когда *первыя двѣ станціи извѣстны заранее*, то возможна **единственная** круговая поѣздка по опредѣленному маршруту, который можетъ быть выработанъ при помощи фиг. 16. Когда же всѣ возможные маршруты будутъ исчерпаны при помощи окружности, изображенной на фиг. 16, то получимъ 20 круговыхъ путешествій, изъ которыхъ каждое имѣетъ двѣ *заранѣе* выбранныя начальныя станціи (при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что по окружности можно двигаться въ *двухъ* направленіяхъ, а потому каждый маршрутъ имѣетъ себѣ обратный).

Если мы заранее намѣтимъ себѣ первыя *три* станціи нашего путешествія, напримѣръ, Брл—

Брс—Мнх, то тогда мы уже не можемъ пользо-
ваться фиг. 16 для составленія маршрута, потому
что въ такомъ случаѣ число круговыхъ поѣздовъ
уменьшается вдвое противъ прежняго; такъ въ
нашемъ примѣрѣ маршруты (изображенные, какъ
и прежде, въ видѣ ряда буквъ *n* и *л*) не должны
начинаться съ *л*: остаются въ силѣ только тѣ,
которые начинаются съ *n*. Но, вѣдь само собой
разумѣется, что, вслѣдствіе полной симметріи
всей рассматриваемой системы, число маршрутовъ,
начинающихся съ *л*, таково же, какъ и число
маршрутовъ, начинающихся съ *n*. Итакъ, въ дан-
номъ случаѣ число круговыхъ поѣздовъ бу-
детъ 10.

Такое разсужденіе можно легко продолжить,
но мы вмѣсто этого удовольствуемся только
тѣмъ, что предложимъ читателямъ готовые ре-
зультаты въ видѣ слѣдующей таблицы *):

Число заранее намѣ- ченныхъ станцій.	Число маршрутовъ.
1	30
2	20
3	10
4	6 или 4
5	4 или 2
6	3, 2, 1 или 0
7	2, 1 или 0
8 и болѣе	1 или 0

*) Слѣдуетъ замѣтить, что въ этой таблицѣ тѣ два маршрута,
которые отличаются другъ отъ друга только направленіемъ, счита-
ются *за одинъ*.

Мы приводимъ эти числовые данныя не только потому, что они представляютъ собою выводы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія фигуры 16, но и потому, что эти числа даютъ представленіе вообще о числѣ *всѣхъ дѣйствительно возможныхъ круговыхъ поѣздокъ*; другими словами, окружность (фиг. 16) заключаетъ въ себѣ всѣ возможные случаи рѣшенія нашей задачи.

Что касается того, справедливы ли числа, помещенныя въ этой таблицѣ, то мы предоставляемъ читателю самому проверить это на опытѣ.

Конечный пунктъ путешествія можно, разумѣется, назначить заранее и рядомъ съ начальнымъ, при чемъ въ такомъ случаѣ требованіе задачи «возвратиться туда, откуда первоначально выѣхали» само собою отпадаетъ. При *трехъ*, заранее намѣченныхъ первыхъ станціяхъ, нельзя закончить путешествіе въ любомъ изъ пунктовъ.

При такомъ, напримѣръ, началѣ: Брл—Лпц—Ин, нельзя имѣть конечный пунктъ Гл, такъ какъ тогда въ одинъ изъ городовъ (Брс) не придется вовсе заѣхать, какъ это случится при слѣдующемъ маршрутѣ:

Брл—Лпц—Ин—Врц—Гдлб—Гс—Гтнг—Мрб —
Стр—Фрб—Тбнг—Эрл—Мнх—Бн—Кл — Кнсб—
Рст—Грвс—Гл.

Наоборотъ, если мы начнемъ путешествіе такъ:

Гдлб—Гс—Гл

и закончимъ въ Кл, то будемъ имѣть для этого случая 4 рѣшенія.

Дѣло въ томъ, что послѣ вышеупомянутаго начала продолжать путь можно или въ Ин, или

— 30 —

Грsv. Въ первомъ случаѣ послѣ Ин необходимо отправиться въ Врц, такъ какъ въ противномъ случаѣ, благодаря уже упраздненнымъ нами путямъ сообщенія, этотъ городъ остался бы не посѣщеннымъ. Изъ Врц можно отправиться въ Тбнг.

Такимъ образомъ, въ томъ случаѣ, когда Ин служить 4-й остановкой, начальный маршрутъ долженъ быть:

Гдлб—Гс—Гл—Ин—Врц—Тбнг.

Теперь для продолженія путешествія мы рекомендовали бы читателю запомнить тѣ дороги, которыя нами уже исключены, а именно:

Гдлб—Стр	Гл—Грsv
Гс—Гтнг	Ин—Лпц
Врц—Гдлб.	

Понятно, что, если изъ Тбнг мы отправимся въ Эрл, то изъ Эрл окажется необходимымъ ѣхать въ Лпц, такъ какъ въ противномъ случаѣ путь Лпц—Ин останется незатронутымъ. По той же причинѣ, когда мы прибудемъ изъ Тбнг въ Фрб, то далѣе пришлось бы отправиться такъ: Стр—Мрб—Гтнг—Рст—Грsv. Но, такъ какъ конечный пунктъ есть Кл, то ни въ Бн, ни въ Кнсб мы не попадемъ.

Слѣдовательно продолженіе: Тбнг — Фрб не годится, и намъ остается только другое: Тбнг—Эрл—Лпц. Продолжая разсуждать такимъ же образомъ, мы окончательно получимъ слѣдующія 4 рѣшенія:

1) Гдлб — Гс — Гл—Ин — Врц — Тбнг — Эрл — Лпц—Брл—Грsv—Рст—Гтнг—Мрб—Стр—Фрб — Бн—Мнх—Брс—Кнсб—Кл.

— 31 —

Для случая, когда 4-й остановкой служить не Ин, а Грsv., мы такимъ же путемъ получимъ слѣдующія рѣшенія:

2) Гдлб — Гс — Гл — Грsv — Брл — Лпц — Ин — Врц — Тбнг — Эрл — Мнх — Брс — Кнсб — Рст — Гтнг — Мрб — Стр — Фрб — Бн — Кл.

3) Гдлб — Гс — Гл — Грsv — Брл — Брс — Кнсб — Рст — Гтнг — Мрб — Стр — Фрб — Тбнг — Врц — Ин — Лпц — Мнх — Бн — Кл.

4) Гдлб — Гс — Гл — Грsv — Рст — Гтнг — Мрб — Стр — Фрб — Бн — Мнх — Эрл — Тбнг — Врц — Ин — Лпц — Брл — Брс — Кнсб — Кл.

Въ заключеніе считаемъ необходимымъ сказать, что *всѣ вышеприведенныя разсужденія* о возможности или невозможности того или другого маршрута *могутъ быть понятны* читателю только въ томъ случаѣ, *если онъ, разсуждая указаннымъ образомъ, будетъ имѣть передъ глазами соотвѣтствующій чертежъ.*

Тѣмъ изъ нашихъ читателей, которые успѣли заинтересоваться описанными и рассмотрѣнными «любопытными путешествіями», мы предлагаемъ самостоятельно рѣшить нѣсколько *вопросовъ* такого же характера. Эти вопросы настолько просты и незамысловаты, что читатель даже при небольшомъ напряженіи мысли легко дастъ отвѣты на каждый изъ нихъ.

Рѣшенія же этихъ вопросовъ, помѣщенныя нѣсколько ниже, даны скорѣе для успокоенія читателя, а отнюдь не для обязательнаго пользованія ими.

— 32 —

Вопросъ 1. Если бы нашъ путешествующій студентъ пожелалъ непременно заниматься богословіемъ, а потому не могъ бы обучаться въ университетахъ Мюнхена, Фрейбурга и Вюрцбурга, то могъ ли онъ выполнить требуемое путешествіе только по *остальнымъ* 17 городамъ?

Вопросъ 2. Дайте на самомъ дѣлѣ полный маршрутъ такого путешествія черезъ 17 городовъ.

Вопросъ 3. Если бы путешественникъ пожелалъ заниматься католическимъ богословіемъ, то ему пришлось бы отправиться для этого какъ разъ въ вышеупомянутые города, т.-е., Мюнхенъ, Фрейбургъ и Вюрцбургъ, и кромѣ того въ Бреслау, Боннъ, Тюбингенъ и Страссбургъ, въ которыхъ имѣются 2 богословскихъ факультета. Возможно ли было бы тогда его путешествіе черезъ эти 7 городовъ и какимъ образомъ?

Вопросъ 4. Скажите, *сколькими и какими способами* можно выполнить круговыя поѣздки, при слѣдующихъ, заранѣе намѣченныхъ начальныхъ остановкахъ:

- a) Мнх—Эрл—Лпц—Ин?
- b) Брл—Брс—Мнх—Эрл?
- c) Гл—Гс—Тбнг—Мрб—Кл?
- d) Стр—Фрб—Бн—Мнх—Эрл?
- e) Лпц—Ин—Гл—Гс—Гтнг—Мрб?
- f) Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Стр—Фрб?

Вопросъ 5. При какомъ наименьшемъ числѣ заранѣе назначенныхъ пунктовъ маршрута придется прервать предпринятую круговую поѣздку?

Отвѣты на вопросы.

Къ вопросу 1. Такъ какъ Фрб и Врц теперь отпадаютъ, то Тбнг имѣетъ только единственное сообщеніе, а именно черезъ Эрл; а вслѣдствіе отпаденія Фрб и Мнх, у Бн остается также единственное сообщеніе черезъ Кл. Такимъ образомъ, предлагаемая задача выполнима только въ томъ случаѣ, если путешествіе начинается изъ Тбнг или изъ Бн. Если Тбнг мы будемъ считать за пунктъ отправленія, то путешествіе должно происходить такимъ образомъ, что Бн окажется конечнымъ пунктомъ и наоборотъ. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ вернуться въ станцію отправленія — *невозможно*.

Къ вопросу 2. Тбнг—Эрл—Лпц—Ин—Гл—Грsv—Брл—Брс—Кнсб—Рст—Гтнг—Гс—Гдлб—Стр—Мрб—Кл—Бн.

Къ вопросу 3. Такое путешествіе черезъ 7 городовъ *никоимъ образомъ невыполнимо*, потому что Брс, Врц и Стр имѣютъ только по одному пути сообщенія съ другими пунктами. Если же изъ этого маршрута Стр будетъ отброшенъ, то тогда поѣздка черезъ остальные 6 городовъ становится возможной, если начать ее съ Брс, а за-

— 34 —

кончить въ Врц, или наоборотъ. Такимъ образомъ, получится рѣшеніе: Брс—Мнх—Бн—Фрб—Тбнг—Врц, или въ обратномъ порядкѣ.

Къ вопросу 4. а) 6-ю способами, а именно:

1) Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Врц—Тбнг—Фрб—Бн—Кл—Кнсб—Рст—Гтнг—Мрб—Стр—Гдлб—Гс—Гл—Грсв—Брл—Брс—Мнх.

2) Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Гл—Гс—Гтнг—Рст—Грсв—Брл—Брс—Кнсб—Кл—Мрб—Стр—Гдлб—Врц—Тбнг—Фрб—Бн—Мнх.

3) Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Гл—Грсв—Брл—Брс—Кнсб—Рст—Гтнг—Гс—Гдлб—Врц—Тбнг—Фрб—Стр—Мрб—Кл—Бн—Мнх.

4) Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Стр—Гдлб—Врц—Тбнг—Фрб—Бн—Кл—Кнсб—Рст—Грсв—Брл—Брс—Мнх.

5) Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Гл—Гс—Гдлб—Врц—Тбнг—Фрб—Стр—Мрб—Гтнг—Рст—Грсв—Брл—Брс—Кнсб—Кл—Бн—Мнх.

6) Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Врц—Тбнг—Фрб—Стр—Гдлб—Гс—Гл—Грсв—Брл—Брс—Кнсб—Рст—Гтнг—Мрб—Кл—Бн—Мнх.

б) 4-мя способами, а именно:

1) Брл—Брс—Мнх—Эрл—Лпц—Ін—Врц—Тбнг—Фрб—Бн—Кл—Кнсб—Рст—Гтнг—Мрб—Стр—Гдлб—Гс—Гл—Грсв—Брл.

2) Брл—Брс—Мнх—Эрл—Тбнг—Фрб—Бн—Кл—Кнсб—Рст—Грсв—Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Стр—Гдлб—Врц—Ін—Лпц—Брл.

— 35 —

3) Брл—Брс—Мнх—Эрл—Лпц—Ин—Гл—Гс—
Гтнг—Мрб—Стр—Гдлб—Врц—Тбнг—Фрб—Бн—
Кл—Кнсб—Рст—Грсв—Брл.

4) Брл—Брс—Мнх—Эрл—Тбнг—Врц—Гдлб—
Гс—Гтнг—Мрб—Стр—Фрб—Бн—Кл—Кнсб—
Рст—Грсв—Гл—Ин—Лпц—Брл.

с) 4-мя способами, а именно:

1) Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Кл—Бн—Мнх—Брс—
Кнсб—Рст—Грсв—Брл—Лпц—Эрл—Тбнг—
Фрб—Стр—Гдлб—Врц—Ин—Гл.

2) Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Кл—Кнсб—Рст—
Грсв—Брл—Брс—Мнх—Бн—Фрб—Стр—Гдлб—
Врц—Тбнг—Эрл—Лпц—Ин—Гл.

3) Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Кл—Бн—Мнх—Эрл—
Тбнг—Фрб—Стр—Гдлб—Врц—Ин—Лпц—Брл—
Брс—Кнсб—Рст—Грсв—Гл.

4) Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Кл—Бн—Фрб—Стр—
Гдлб—Врц—Тбнг—Эрл—Мнх—Брс—Кнсб—
Рст—Грсв—Брл—Лпц—Ин—Гл.

д) 2-мя способами, а именно:

1) Стр—Фрб—Бн—Мнх—Эрл—Тбнг—Врц—
Гдлб—Гс—Гтнг—Рст—Грсв—Гл—Ин—Лпц—
Брл—Брс—Кнсб—Кл—Мрб—Стр.

2) Стр—Фрб—Бн—Мнх—Эрл—Тбнг—Врц—
Ин—Лпц—Брл—Брс—Кнсб—Кл—Мрб—Гтнг—
Рст—Грсв—Гл—Гс—Гдлб—Стр.

е) 3-мя способами, а именно:

1) Лпц—Ин—Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Кл—Кнсб—

3*

— 36 —

Рст—Грsv—Брл—Брс—Мнх—Бн—Фрб—Стр—
Гдлб—Врц—Тбнг—Эрл—Лпц.

2) Лпц—Ин—Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Кл—Бн—
Фрб—Стр—Гдлб—Врц—Тбнг—Эрл—Мнх—Брс—
Кнсб—Рст—Грsv—Брл—Лпц.

3) Лпц—Ин—Гл—Гс—Гтнг—Мрб—Стр—Гдлб—
Врц—Тбнг—Фрб—Бн—Кл—Кнсб—Рст—Грsv—
Брл—Брс—Мнх—Эрл—Лпц.

f) Задача — *невозможна*.

Къ вопросу 5. При 8-ми станціяхъ; напрімѣръ:
Лпц—Ин—Врц—Тбнг—Фрб—Бн—Мнх—Эрл.

Ариѳметика безъ вычисленій.

Въ этомъ отдѣлѣ мы намѣрены познакомить читателей съ *особымъ способомъ* для рѣшенія нѣкоторыхъ ариѳметическихъ вопросовъ практическаго характера, съ которыми намъ приходится то и дѣло сталкиваться въ жизни.

Такіе вопросы, часто далеко неясные съ перваго взгляда, въ высшей степени легко разрѣшаются вышеупомянутымъ способомъ *только посредствомъ черченія* на особой клѣтчатой бумагѣ (клѣтчаткѣ); чертежи, получаемые при рѣшеніи подобныхъ вопросовъ, называются **графиками**, а самъ способъ носить названіе **графическаго**.

Для того, чтобы примѣнить этотъ способъ къ дѣлу, вы прежде всего запаситесь нѣсколькими листами клѣтчатки (ее можно получить въ любомъ писчебумажномъ магазинѣ). Такая бумага покрыта равноотстоящими горизонтальными и вертикальными линіями, при чемъ каждая *пятая* (или *десятая*) линія, для болѣе удобнаго и скораго измѣренія, проведена болѣе отчетливо, чѣмъ другія.

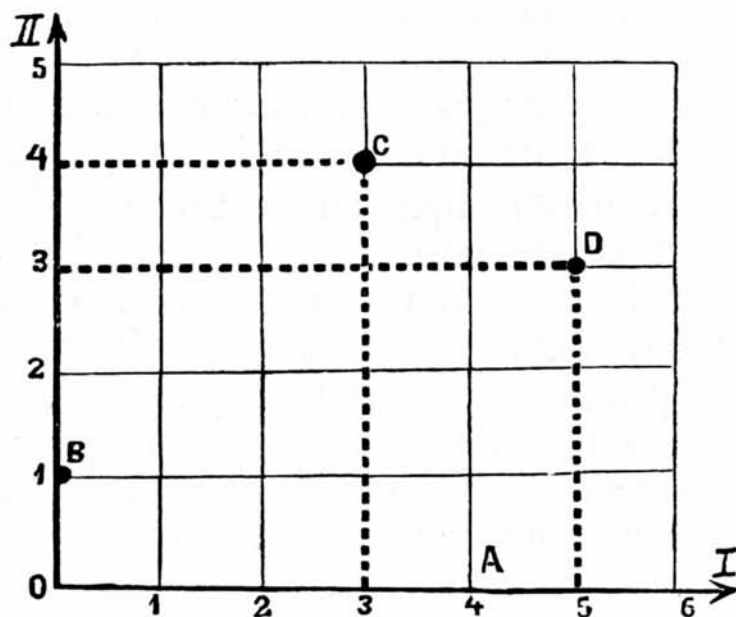
На практикѣ *графики* чаще всего примѣняются къ вопросамъ: о колебаніи температуры (или барометрической высоты), о движеніи желѣзнодорожныхъ поѣздовъ и пароходовъ, о путешествіи

пресловутых «курьеровъ», фигурирующихъ чуть не въ каждомъ ариѳметическомъ задачникѣ, и т. д.

Всѣ вопросы, рѣшаемые *графически*, носятъ такой характеръ, что при рѣшеніи ихъ, является возможнымъ прослѣдить, **какъ измѣняется какая-либо измѣряемая величина въ зависимости отъ измѣненія другой величины.**

Черченіе графиковъ никакой трудности собою не представляетъ, а потому мы переходимъ прямо къ описанію этого интереснаго и полезнаго занятія.

Возьмите листъ клѣтчатки и проведите на немъ изъ одной точки (0), называемой *началомъ*, горизонтальную и вертикальную линіи (фиг. 17); эти линіи мы будемъ называть **осями** (I и II).



Фиг. 17.

На одной изъ этихъ осей мы будемъ откладывать, напр., единицы времени (минуты), а на дру-

гой—хотя бы единицы разстоянія (версты). На нашемъ чертежѣ (фиг. 17) на I оси отложены 3 мин.*), а на II оси—4 версты.

Тогда, проводя (вверхъ и вправо) изъ точекъ (3) и (4) двѣ линіи (пунктирныя), мы получимъ точку ихъ пересѣченія С, которая *условно* будетъ показывать намъ положеніе тѣла, двигающагося въ теченіе 3 минутъ и проходящаго за это время 4 версты.

Точка D (на томъ же чертежѣ) соотвѣтствуетъ положенію тѣла, двигающагося въ теченіе 5 минутъ и проходящаго за это время 3 версты.

Ниже мы предлагаемъ читателю нѣсколько задачъ, которыя весьма просто и легко рѣшаются графическимъ способомъ.

1. О двухъ путникахъ.

1. Одинъ богомолецъ отправился изъ деревни въ монастырь, проходя по 3 версты въ часъ; черезъ 2 часа послѣ его выхода, изъ той же деревни и въ тотъ же монастырь пошелъ его товарищъ и, желая догнать перваго, шелъ со скоростью 5 верстъ въ часъ. Черезъ сколько часовъ и на какомъ разстояніи отъ деревни догонитъ второй богомолецъ перваго?

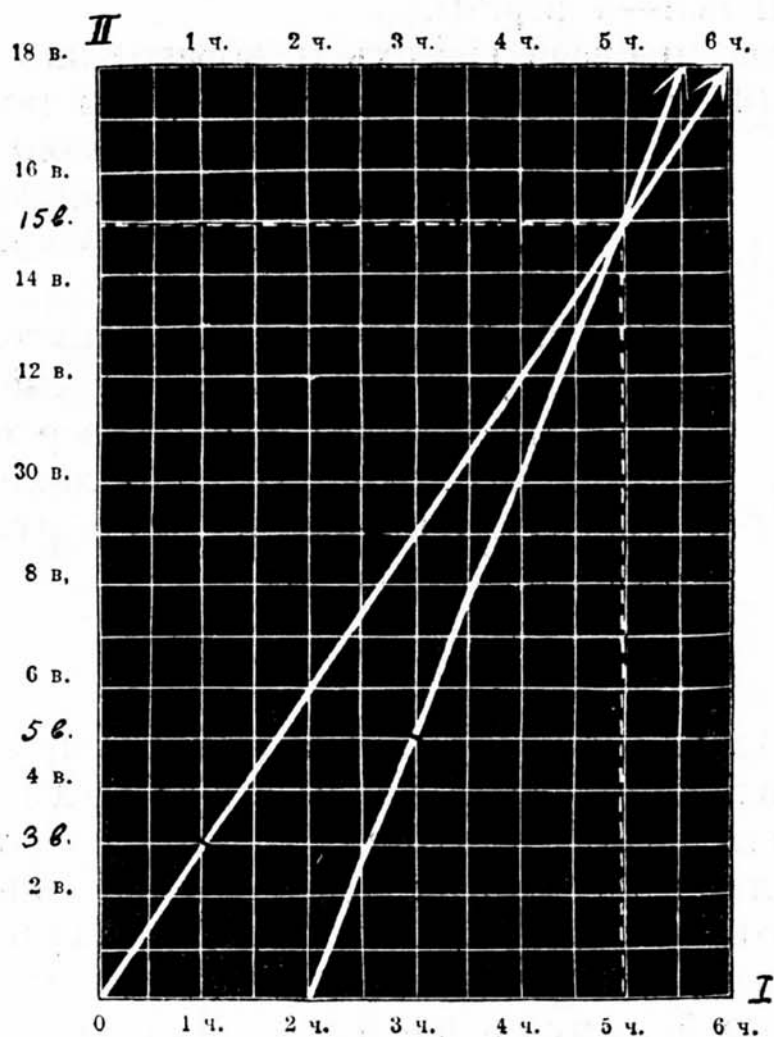
Для рѣшенія этой задачи строимъ *графикъ* движенія каждаго изъ путниковъ.

На I оси откладывая время (считая *каждую* двѣ клѣтки за 1 часъ), а на II оси—разстояніе (считая *каждую* клѣтку за 1 версту).

*) Каждая клѣтка на бумагѣ соотвѣтствуетъ 1 минутѣ.

— 40 —

Такъ какъ первый богомолецъ проходилъ въ 1 часъ 3 версты, то графикъ его движенія мы



Фиг. 18.

получимъ, если: 1) найдемъ точку, соответствующую 1 часу и 3 верст., и 2) соединимъ эту точку съ началомъ *О* *прямою линіей* *).

При построении графика движенія второго богомольца, слѣдуетъ принять во вниманіе, что онъ вышелъ *на 2 часа позднѣе* и проходилъ въ 1 часъ

*) Эту линію надо проводить по линейкѣ и особенно *тщательно и точно*.

5 верстъ; слѣдовательно: 1) находимъ точку, соответствующую 3 час. (т.-е. 2 ч. + 1 ч.) и 5 вер., 2) соединяемъ ее съ точкой, соответствующей моменту отправленія въ путь второго богомольца (въ 2 часа).

Для того, чтобы отвѣтить на вопросы, поставленные въ нашей задачѣ, нѣтъ нужды дѣлать арифметическія вычисленія; а стоитъ только посмотреть, какому времени и какому разстоянію соответствуетъ точка встрѣчи двухъ найденныхъ линій движенія нашихъ путниковъ.

Дѣйствительно, если отъ этой точки пересѣченія мы спустимся внизъ (по пунктирной линіи), то увидимъ, что моменту встрѣчи соответствуетъ время 5 часовъ, а за вычетомъ 2 часовъ (согласно условію задачи) получимъ 3 часа; слѣдовательно *второй богомольецъ догонитъ перваго черезъ 3 часа.*

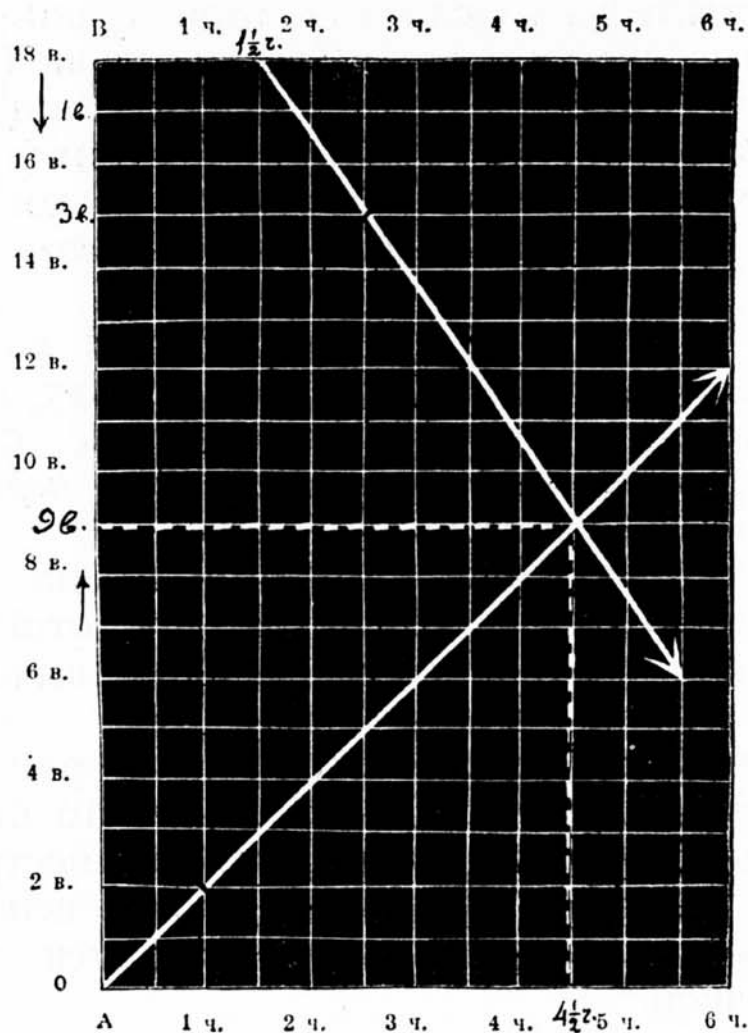
Если же отъ той же точки встрѣчи мы направимся *вправо*, то увидимъ, что моменту встрѣчи соответствуетъ разстояніе 15 верстъ; слѣдовательно, *второй богомольецъ догонитъ перваго на разстояніи 15 верстъ отъ деревни.*

Если вы попробуете рѣшить ту же задачу *арифметически*, то убѣдитесь, что отвѣты, которые мы съ вами получили безъ вычисленій, вполне справедливы.

Не мѣшаетъ, кстати, замѣтить, что результаты, получаемые графическимъ путемъ, часто бываютъ не вполне точны (вслѣдствіе неточнаго построенія); но на практикѣ, при тщательномъ исполненіи графиковъ, ихъ точность оказывается вполне достаточной.

— 42 —

2. Изъ одной деревни крестьянинъ пошелъ навѣстить сына, который жилъ въ городѣ, отстоявшемъ отъ деревни на разстояніи 18 верстъ; крестьянинъ проходилъ въ часъ по 2 версты. Сынъ, не дождавшись прихода отца, самъ пошелъ ему навстрѣчу со скоростью 3 версты въ часъ. При этомъ, какъ оказалось потомъ, сынъ вышелъ на $1\frac{1}{2}$ часа позже отца. Когда и на какомъ разстояніи отъ деревни сынъ встрѣтилъ отца?



Фиг. 19.

Построение графика движения крестьянина:
Находимъ точку, соответствующую 1 часу и 2 верст, и соединяемъ ее съ началомъ 0 прямою линіей (фиг. 19).

Построение графика движения сына:

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить: 1) что начало движенія сына находится на разстояніи 18 верстъ отъ исходнаго пункта отца; 2) сынъ началъ свой путь на $1\frac{1}{2}$ часа позже отца и 3) сынъ проходилъ въ 1 часъ 3 версты. Поэтому отсчитываемъ *сверху внизъ* 3 версты (1 в. = 1 клѣт.), а слѣва направо, начиная отъ точки « $1\frac{1}{2}$ ч.» — 1 часъ (1 ч. = 2 клѣт.); найденную такимъ образомъ точку, соответствующую 3 верст. и $2\frac{1}{2}$ ч. (т.-е. $1\frac{1}{2} + 1$ ч.), соединяемъ съ началомъ движенія сына (« $1\frac{1}{2}$ ч.»).

Точка пересѣченія двухъ графиковъ даетъ намъ отвѣты на нашу задачу, а именно: *встрѣча отца съ сыномъ произошла на разстояніи 9 верстъ отъ деревни и черезъ $4\frac{1}{2}$ часа послѣ выхода отца изъ деревни, или черезъ 3 часа ($4\frac{1}{2}$ ч. — $1\frac{1}{2}$ ч.) послѣ отправленія въ путь сына изъ города.*

II. Изъ Гавра въ Нью-Йоркъ.

3 *). Изъ гавани французскаго города Гавра ежедневно ровно въ 12 часовъ дня отправляется въ Нью-Йоркъ (Америка) почтовый пароходъ. Въ то же время изъ Нью-Йорка ежедневно и также ровно въ полдень отправляется та-

*) Эта задача помѣщена въ вып. III «*Забавной ариѳметики*» Н. Аменицкаго и И. Сахарова, но тамъ она рѣшена не графическимъ путемъ, а ариѳметически.

кой же пароходъ въ Гавръ. Этотъ перѣздъ по Атлантическому океану совершается, какъ въ ту, такъ и въ другую сторону, ровно въ 7 сутокъ. Скажите, сколько пароходовъ встрѣтитъ на своемъ пути пароходъ, отплывшій изъ Гавра въ понедѣльникъ 7 іюля, какъ полагается, ровно въ 12 часовъ дня.

Эта задача была предложена для разрѣшенія на одномъ изъ научныхъ конгрессовъ однимъ изъ присутствовавшихъ тамъ математикомъ.

Съ перваго взгляда вопросъ, поставленный въ этой задачѣ, можетъ показаться вамъ, читатель, простымъ и понятнымъ и вы, быть можетъ, уже готовы дать такой отвѣтъ: если пароходъ находится въ пути 7 сутокъ, и навстрѣчу ему ежедневно отплываетъ по одному пароходу, то, очевидно, нашъ пароходъ долженъ встрѣтить на своемъ пути 7 пароходовъ.

Но, если вы такъ думаете, то жестоко ошибаетесь!

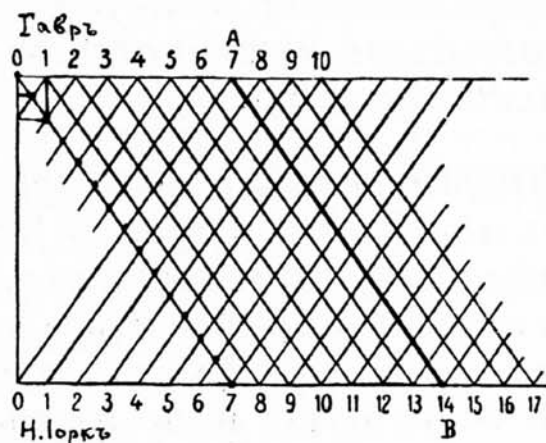
Дѣло въ томъ, что въ такомъ случаѣ вы думаете *только* о тѣхъ встрѣчныхъ пароходахъ, которые отплыли изъ Нью-Йорка за то время, пока гаврскій пароходъ былъ въ пути. Но вы совершенно забываете про тѣ пароходы, которые *уже были въ дорогѣ*, пока еще нашъ пароходъ не отплывалъ изъ Гавра. Напримѣръ, вы забыли о пароходахъ, отправившихся изъ Нью-Йорка *въ воскресенье* (6 іюля), *въ субботу* (5 іюля), *въ пятницу* (4 іюля) и т. д. Всѣ эти пароходы *также* попадутся навстрѣчу тому, который вышелъ изъ Гавра въ понедѣльникъ (7 іюля).

Въ такую же ошибку впали и нѣкоторые изъ присутствовавшихъ на вышеупомянутомъ конгрессѣ, а среди нихъ было не мало извѣстныхъ математиковъ и профессоровъ! Большинство же участниковъ конгресса было озадачено такимъ вопросомъ и сосредоточенно молчали.

Тогда математикъ, предложившій задачу, подошелъ къ доскѣ, разграфленной, какъ и ваша клѣтчатка, и, построивъ графики движенія пароходовъ, показалъ въ высшей степени ясно и наглядно, въ чемъ тутъ дѣло, и какой отвѣтъ на задачу долженъ считаться правильнымъ.

Для того, чтобы и намъ съ вами разобраться въ этомъ вопросѣ, удобнѣе всего, конечно, прибѣгнуть также къ графическому способу изображенія движеній пароходовъ.

Чтобы построить графикъ парохода, вышедшаго изъ Гавра въ какой-либо день въ полдень, мы



Фиг. 20.

должны начать О, соответствующее Гавру (на II оси), соединить съ точкой «7» на I оси, гдѣ отложено время (1 сутки=1 клѣт.)

Точно такимъ же образомъ мы построимъ и графики для всѣхъ пароходовъ, вышедшихъ въ

каждый изъ слѣдующихъ дней какъ изъ Гавра, такъ и изъ Н.-Йорка (фиг. 20).

Пусть графикъ АВ представляетъ движеніе именно того парохода, который вышелъ изъ Гавра въ понедѣльникъ 6 іюля въ 12 час. дня. Тогда, изъ простого разсмотрѣнія чертежа ясно видно, что линія АВ пересѣкается встрѣчными линіями 13 разъ и кромѣ того еще 2 раза встрѣчается своими концами съ концами двухъ другихъ линій въ точкахъ А и В. Отсюда мы имѣемъ право заключить слѣдующее: *пароходъ, вышедшій изъ Гавра 6 іюля въ 12 час. дня, во-первыхъ, въ самый моментъ отплытія изъ гаврской гавани встрѣтилъ входившій туда американскій пароходъ, во-вторыхъ, на своемъ пути этотъ гаврскій пароходъ встрѣтилъ 13 нью-іоркскихъ пароходовъ и, наконецъ, въ-третьихъ, въ моментъ своего прибытія въ Н.-Йоркъ тотъ же пароходъ встрѣтилъ отплывавшій оттуда пароходъ.*— **Итого истинное число всѣхъ встрѣчныхъ пароходовъ—15.**

III. Выгодный способъ передвиженія.

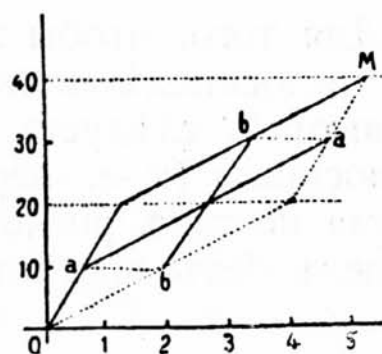
4 *). По шоссеиной дорогѣ ѣхали вмѣстѣ домой два велосипедиста, каждый со скоростью 15 верстъ въ часъ. Когда имъ оставалось проѣхать только 40 верстъ, то у одного изъ нихъ велосипедъ сломался, и онъ долженъ былъ отдать его въ починку. Не желая прерывать своего путешествія, они рѣшили выйти изъ своего затруднительнаго положенія слѣдующимъ образомъ: они

* См. примѣч. на стр. 43.

отправятся вмѣстѣ, одинъ на велосипедѣ, а другой пѣшкомъ, а спустя нѣкоторое время велосипедистъ остановится, поставитъ свою машину въ канаву, возлѣ шоссе и отправится дальше пѣшкомъ; когда его товарищъ дойдетъ до того мѣста, гдѣ спрятанъ велосипедъ, то онъ будетъ продолжать свой путь уже на велосипедѣ и догонитъ пѣшехода; тутъ они снова помѣняются ролями и, продолжая поступать такимъ образомъ, закончатъ свой путь. Зная, что каждый путешественникъ способенъ пѣшкомъ пройти 5 верстъ въ часъ, постарайтесь узнать: 1) въ какомъ мѣстѣ слѣдуетъ оставить послѣдній разъ велосипедъ (т.-е. произвести пересадку), чтобы оба путника добрались до города одновременно? 2) Скорѣе ли (и на сколько) описанный способъ передвиженія, чѣмъ пѣшеходный? 3) Когда они придутъ домой, если послѣ порчи велосипеда они отправились въ путь ровно въ полдень?

Фигура 21-ая представляетъ собою графики движеній каждого изъ путешественниковъ: для перваго — сплошной чертой, а для второго — пунктиромъ. Здѣсь изображены два случая.

1) Велосипедистъ (1-й) доѣзжаетъ до половины дороги (въ 1 ч. 20 м.) и оставляетъ тутъ свой велосипедъ; ему остается путь въ 20 верстъ,



Фиг. 21.

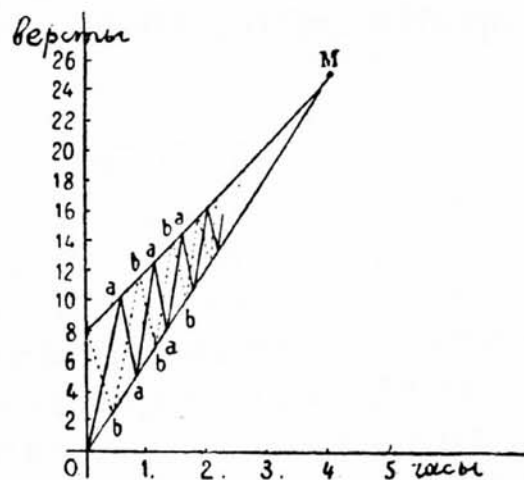
которая онъ проходитъ пѣшкомъ (въ 4 часа). Второй же велосипедистъ проходитъ пѣшкомъ (въ 4 часа) первую половину пути, т.-е. 20 верстъ, а остальной путь (20 в.) онъ проѣзжаетъ на велосипедѣ въ 1 ч. 20 м. Ясно, что они придутъ въ городъ въ одинъ и тотъ же моментъ, потому что, какъ тотъ, такъ и другой велосипедистъ въ общемъ употребили на свой путь 5 ч. 20 м.; т. какъ въ это время каждый изъ нихъ проѣхалъ 40 верстъ, — а это составляетъ среднюю скорость $7\frac{1}{2}$ верстъ въ часъ, — то, очевидно, что такой оригинальный способъ передвиженія много скорѣе пѣшеходнаго (5 в. въ часъ).

2) Если предположить, что велосипедъ оставленъ въ первый разъ на разстояніи 10 верстъ, а потомъ на разстояніи 30 верстъ отъ мѣста катастрофы, то графики нашихъ путешественниковъ будутъ изображаться ломаными линиями: ОааМ—для одного и ОббМ—для другого (фиг. 21). Въ этомъ случаѣ, какъ это прекрасно видно изъ чертежа, наши путники первый разъ встрѣтятся на половинѣ пути, при чемъ велосипедистъ обгонитъ пѣшехода, а вторично они увидятся въ моментъ прибытія домой, куда они, какъ уже сказано, доберутся одновременно.

Для того, чтобы этотъ способъ передвиженія на велосипедѣ можно было осуществлять на практикѣ, слѣдуетъ посоветовать, чтобы смѣны велосипеда (т.-е. пересадки) совершались почаще; тогда не такъ рискованно будетъ оставлять велосипедъ безъ присмотра на краю дороги.

IV. Собака и два пѣшехода.

5. Два пѣшехода, одинъ на 8 верстъ впереди другого, одновременно двинулись въ путь по одной и той же дорогѣ и въ одномъ направленіи; первый проходитъ 4 в., а второй — 6 в. въ часъ. У одного изъ путниковъ есть собака, которая въ моментъ ихъ отправленія начала бѣгать отъ одного пѣшехода къ другому со скоростью 15 верстъ въ часъ и продолжала это до тѣхъ поръ, пока шедшій сзади путникъ не догналъ другого. Узнайте: 1) сколько всего верстъ пробѣжала собака и 2) которому изъ путниковъ она принадлежитъ?



Фиг. 22.

На фиг. 22-й имѣются графики:

- 1) движенія 1-го путника ... OM
- 2) движенія 2-го путника ... 8M
- 3) движенія собаки 0aаа ... (сплошн. лин.),
или 8bбб ... (пунктиръ).

— 50 —

Если вы построите эти графики на клетчатой бумаге, то увидите, что один путешник догналъ другого въ точкѣ М, которая соотвѣтствуетъ времени «4 час.» и разстоянію «24 в.». Это и даетъ намъ отвѣтъ на вопросъ: *путешникъ догналъ своего товарища на разстояніи 24 в. отъ исходнаго пункта, по прошествіи 4 часовъ.* А въ эти 4 часа собака могла пробѣжать (по 15 в. въ часъ) 60 верстъ. Следовательно, на первый вопросъ нашей задачи приходится отвѣтить: *60 верстъ.*

Что же касается того, кому изъ пѣшиходовъ принадлежитъ собака, то, изъ разсмотрѣнія двухъ графиковъ движенія собаки, видно, что оба они суть совершенно *одинаковыя* по длинѣ зигзагообразныя линіи, а потому безразлично, кому принадлежала собака, такъ какъ и въ томъ и въ другомъ случаѣ она бѣгала бы въ теченіе 4 часовъ и пробѣжала бы 60 в.

Затруднительныя переправы черезъ рѣку.

Въ заключеніе нашей бесѣды мы познакомимъ читателя съ такими «любопытными путешествіями», цѣль которыхъ заключается въ томъ, чтобы *переправиться черезъ рѣку при соблюденіи заранее поставленныхъ, иногда весьма странныхъ, условій.*

1. Вообразите, на примѣръ, что къ берегу рѣки подошла рота солдатъ, и командиръ, къ своему неудовольствію, узнаетъ, что мостъ черезъ рѣку сломанъ, а перейти рѣку въ бродъ, благодаря ся глубинѣ, невозможно. Какъ быть? Не заставляютъ же солдатъ, рискуя ихъ жизнью, переправляться вплавь? Случайно, командиръ замѣтилъ у берега двоихъ мальчиковъ, сидящихъ и играющихъ въ лодочкѣ, которая была до того мала, что могла выдержать только одного солдата. Тѣмъ не менѣе командиръ не потерялся и, благодаря своей сообразительности, сумѣлъ переправить на другой берегъ всѣхъ солдатъ своей роты.

— 52 —

Интересно знать, какъ же онъ это сдѣлалъ?

Оказывается весьма просто, но вмѣстѣ съ тѣмъ и остроумно.

Онъ отправилъ въ лодочкѣ на другой берегъ только двухъ мальчиковъ, при чемъ одному изъ нихъ было приказано тамъ и остаться, а другому вернуться назадъ съ лодкой. Когда мальчикъ привезъ лодку и вылѣзъ, то въ нее сѣлъ одинъ изъ солдатъ и переѣхалъ черезъ рѣку, а мальчикъ, остававшійся на томъ берегу, привелъ лодку обратно. Послѣ этого отправились на другой берегъ опять только два мальчика; одинъ изъ нихъ снова остался тамъ, а другой, вернувшись, передалъ лодку уже второму солдату и т. д.

Такимъ образомъ, при помощи двухъ переправъ (туда и обратно), переѣзжаетъ одинъ солдатъ; это продолжается до тѣхъ поръ, пока не будетъ перевезена вся рота, а также командиръ ея и остальные офицеры.

2. Теперь рассмотрим любопытную переправу при весьма оригинальныхъ условіяхъ.

Три мужа желаютъ переѣхать со своими женами черезъ рѣку въ лодкѣ, въ которой могутъ помѣститься только двое. Мужчины, посоветовавшись между собою, уже хотѣли начать переправу, но оказалось, что ни одна изъ ихъ женъ не пожелала оставаться ни въ лодкѣ, ни на берегу безъ своего мужа въ обществѣ одного или двухъ другихъ

— 53 —

мужей. Долго думали мужья, но, наконецъ, догадались, какъ поступить, чтобы желаніе ихъ женъ было исполнено. Какъ они должны были переправляться черезъ рѣку?

Эта задача была извѣстна еще во времена Карла Великаго; кромѣ того она встрѣчается въ одной изъ найденныхъ рукописей XIII столѣтія, въ которой фигурируютъ двое нѣмецкихъ юношей *Firri* и *Turri*, предлагающіе другъ другу для рѣшенія различные остроумные вопросы, среди которыхъ встрѣчается и вышеприведенная задача.

Чтобы объяснить рѣшеніе этой задачи, мы назовемъ мужей большими буквами А, В и С, а ихъ женъ — соотвѣтствующими малыми а, b и с.

Тогда до переправы дѣло будетъ обстоять слѣдующимъ образомъ:

Правый берегъ.

Лѣвый берегъ.

С	В	А		.	.	.
с	b	a		.	.	.

Рѣшеніе задачи представится въ такомъ видѣ:

1) Прежде всего переѣзжаютъ двѣ женщины.

С	В	А		.	.	.
с	.	.		.	b	a

2) Одна женщина возвращается и увозитъ третью.

С	В	А		.	.	.
.	.	.		с	b	a

— 54 —

*Лѣвый берегъ.**Правый берегъ.*

3) Одна женщина возвращается и остается съ своимъ мужемъ, а двое другихъ мужчинъ переправляются.

С	.	.		.	В	А
с	.	.		.	в	а

4) Одинъ мужъ возвращается со своей женой, которую онъ оставляетъ на правомъ берегу, а самъ переправляетъ мужа другой женщины.

.	.	.		С	В	А
с	в	.		.	.	а

5) Женщина возвращается и перевозитъ одну изъ своихъ подругъ, оставшихся на правомъ берегу.

.	.	.		С	В	А
а	.	.		.	в	а

6) Одна изъ переправившихся женщинъ возвращается за послѣдней изъ своихъ подругъ.

.	.	.		С	В	А
.	.	.		с	в	а

3. Предположимъ, что во время переправы черезъ рѣку можно высаживаться предварительно *на островъ*, и тогда, при сохраненіи всѣхъ условій первой задачи, легко перевезти сколько угодно семей въ лодкѣ, поднимающей только двоихъ пассажировъ. Такимъ образомъ мы дадимъ полное рѣшеніе слѣдующаго вопроса:

Какъ перевезти черезъ рѣку, на которой есть островъ, гдѣ можно оста-

новиться, известное число семей, пользуясь лодкой, поднимающей только двоихъ, и при томъ условіи, чтобы ни одна жена не оставалась ни на берегу, ни въ лодкѣ, ни на островѣ въ обществѣ мужчинъ безъ своего мужа?

Мы предположимъ сначала, что число семей равно, по крайней мѣрѣ, четыремъ. Тогда рѣшеніе задачи должно разбиться на три отдѣльныя переправы:

Начальная переправа. Тутъ прежде всего необходимо перевезти одну семью на лѣвый берегъ, а другую на островъ. Это достигается посредствомъ пяти переѣздовъ, при чемъ послѣ каждого изъ нихъ лодка причаливается къ острову.

Правый берегъ. Островъ. Лѣвый берегъ.

D	C	B	A		.	.	.	.		.	.	.	.
d	c	b	a		.	.	.	.		.	.	.	.

1) Двѣ женщины переѣзжаютъ на островъ:

D	C	B	A		.	.	.	.		.	.	.	.
d	c	.	.		.	.	b	a		.	.	.	.

2) Одна изъ нихъ возвращается за третьей:

D	C	B	A		.	.	.	.		.	.	.	.
d	.	.	.		.	c	b	a		.	.	.	.

3) Одна женщина возвращается и остается съ своимъ мужемъ, а двое мужей присоединяются къ своимъ женамъ:

D	C	.	.		.	.	B	A		.	.	.	.
d	c	.	.		.	.	b	a		.	.	.	.

— 56 —

Правый берегъ. Островъ. Лѣвый берегъ.

4) Обѣ женщины переѣзжаютъ съ острова на лѣвый берегъ рѣки, и одна изъ нихъ возвращается на островъ:

D	C	.	.		.	B	A		.	.	.	.
d	c	.	.		.	b	.		.	.	.	a

5) Мужчины съ острова переправляются на лѣвый берегъ, и одинъ изъ нихъ возвращается на островъ къ своей женѣ:

D	C	.	.		.	.	B	.		.	.	.	A
d	c	.	.		.	.	b	.		.	.	.	a

Промежуточная переправа. Теперь нужно, во-первыхъ, перевезти съ праваго берега одну изъ оставшихся тамъ семей на островъ и, во-вторыхъ, переправить одну семью съ острова на лѣвый берегъ, для чего требуется *четыре* переѣзда, и послѣ каждого изъ нихъ лодка должна попрежнему приставать къ острову.

1) Одинъ мужчина переѣзжаетъ на правый берегъ съ острова, а двѣ женщины отправляются туда:

D	C	B	.		.	.	.	.		.	.	.	A
.	.	.	.		d	c	b	.		.	.	.	a

2) Одна женщина возвращается съ острова и остается съ своимъ мужемъ, а двое другихъ мужчинъ отправляются къ своимъ женамъ на островъ.

D	.	.	.		.	C	B	.		.	.	.	A
d	.	.	.		.	c	b	.		.	.	.	a

— 57 —

Правый берегъ. Островъ. Лѣвый берегъ.

3) Двое мужчинъ переѣзжаютъ на лѣвый берегъ, а жена одного изъ нихъ отправляется на островъ:

D	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	C	B	A
d	.	.	.	.	.	c	b	a	.	.	.	.	.

4) Двѣ женщины переѣзжаютъ на лѣвый берегъ съ острова, послѣ чего одинъ изъ мужчинъ С возвращается туда:

D	.	.	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	B	A
d	.	.	.	.	.	c	.	.	.	.	.	.	b	a

Въ случаѣ бѣльшаго числа семей эти переѣзды слѣдуетъ повторять до тѣхъ поръ, пока на правомъ берегу и на островѣ не останется по одной семьѣ.

Окончательная переправа. Теперь приходится переправить на лѣвый берегъ двѣ семьи: одну съ праваго берега, другую—съ острова; для этого потребуется *три* переѣзда, при чемъ послѣдній хотя и совершается вдвойнѣ, но можетъ считаться за одинъ.

1) Мужчина съ острова возвращается на правый берегъ за послѣднимъ изъ оставшихся тамъ своихъ товарищей:

.	.	.	.	.	D	C	.	.	.	.	.	.	B	A
d	.	.	.	.	.	c	.	.	.	.	.	.	b	a

— 58 —

Правый берегъ. Островъ. Лѣвый берегъ.

2) Мужчины съ острова переѣзжаютъ на лѣвый берегъ, откуда одна изъ женщинъ возвращается на островъ.

.	.	.	.		.	.	.	.		D	C	B	A
d	.	.	.		.	c	b	.		.	.	.	a

3) Обѣ женщины съ острова переправляются на лѣвый берегъ, послѣ чего одна изъ нихъ перевозитъ туда же и свою подругу, оставшуюся на правомъ берегу:

.	.	.	.		.	.	.	.		D	C	B	A
.	.	.	.		.	.	.	.		d	c	b	a

Для тѣхъ изъ читателей, которые заинтересовались «переправой», мы можемъ дать совѣтъ, какимъ образомъ удобнѣе и нагляднѣе разрѣшать подобные вопросы:

Раздѣлите карандашомъ листъ бумаги на двѣ полосы (въ случаѣ двухъ береговъ) или на три полосы (въ случаѣ двухъ береговъ и острова). Затѣмъ вырѣжьте изъ цвѣтной бумаги столько *большихъ* кружковъ (разнаго цвѣта), сколько мужчинъ участвуетъ въ переправѣ и столько же *малыхъ* кружковъ, *соотвѣтствующей* окраски: каждый большой кружокъ будетъ изображать одного изъ мужей, а каждый малый кружокъ того же цвѣта—его жену.

Когда все это будетъ у васъ готово, то можете приступить къ рѣшенію этой любопытной задачи.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Отъ редактора	<i>стр.</i> 3
Любопытныя путешествія.	
Игра въ извозчика	5
Кенигсбергскіе мосты	7
Путешествіе Гамильтона	17
Ариѳметика безъ вычисленій	37
О двухъ путникахъ	39
Изъ Гавра въ Нью-Йоркъ	43
Выгодный способъ передвиженія	46
Собака и два пѣшехода	49
Затруднительныя переправы черезъ рѣку	51
